

# Konzervativní pole

- **konzervativní pole**

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$$

práce nezávisí na tvaru dráhy  $\longrightarrow$  můžeme zavést potenciál a potenciální energii

zachovává se mechanická energie  $E_k + E_p = \text{konst}$

konzervativní jsou všechna homogenní pole ( $\vec{F} = \text{konst}$ ) a pole centrálních sil  $\left( \vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \right)$

- **nekonzervativní pole**

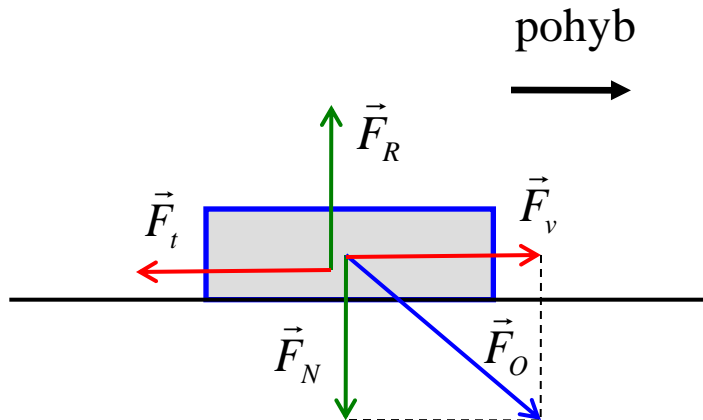
$$\oint \vec{F} d\vec{r} < 0$$

práce závisí na tvaru dráhy

kinetická energie pohybujícího se tělesa se snižuje

# Tření

## • smykové tření



$$\vec{F}_t = -\mu F_N \vec{e}_v$$

$\mu$  – koeficient smykového tření

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{F}_v}{F_v} \quad \text{– jednotkový vektor ve směru síly } F_v$$

$$\vec{F} = \vec{F}_v + \vec{F}_N + \vec{F}_t + \vec{F}_R$$

- pokud je  $F_v$  menší než kritická hodnota:

$$F_v < F_{vk} \longrightarrow \vec{F}_t = -\vec{F}_v \quad (\text{těleso se nepohybuje})$$

- pokud je  $F_v$  překročí kritickou hodnotu:

$$F_v > F_{vk} \longrightarrow F_t < F_v \quad (\text{těleso se začne pohybovat})$$

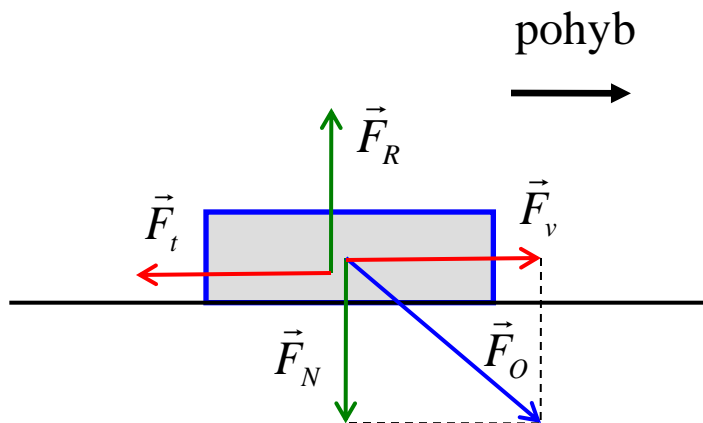
- $\mu_s$  – koeficient statického tření
- $\mu_k$  – koeficient kinematického tření

$$\mu_s \geq \mu_k$$

- typické hodnoty  $\mu_s = 0.3 - 0.6$

# Tření

## • smykové tření



$$\vec{F}_t = -\mu F_N \vec{e}_v$$

$\mu$  – koeficient smykového tření

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{F}_v}{F_v} \quad \text{– jednotkový vektor ve směru síly } F_v$$

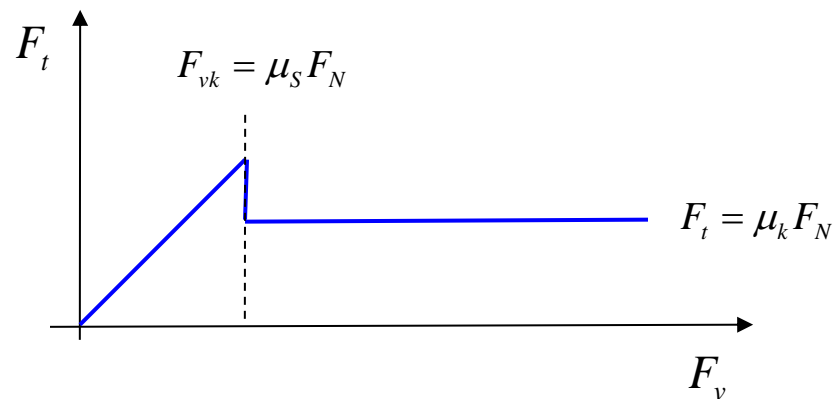
$$\vec{F} = \vec{F}_v + \vec{F}_N + \vec{F}_t + \vec{F}_R$$

- pokud je  $F_v$  menší než kritická hodnota:

$$F_v < F_{vk} \longrightarrow \vec{F}_t = -\vec{F}_v \quad (\text{těleso se nepohybuje})$$

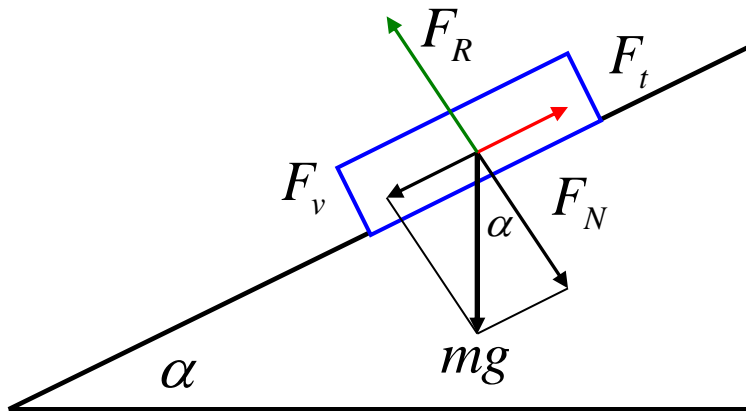
- pokud je  $F_v$  překročí kritickou hodnotu:

$$F_v > F_{vk} \longrightarrow F_t < F_v \quad (\text{těleso se bude pohybovat})$$



# Tření

- určení statického koeficientu smykového tření



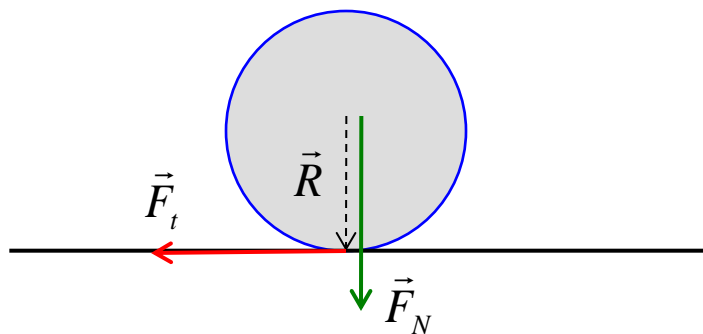
$$F_t = \mu_s F_N = \mu_s mg \cos \alpha$$

$$F_t = mg \sin \alpha$$

$$\mu_s = \operatorname{tg} \alpha$$

# Tření

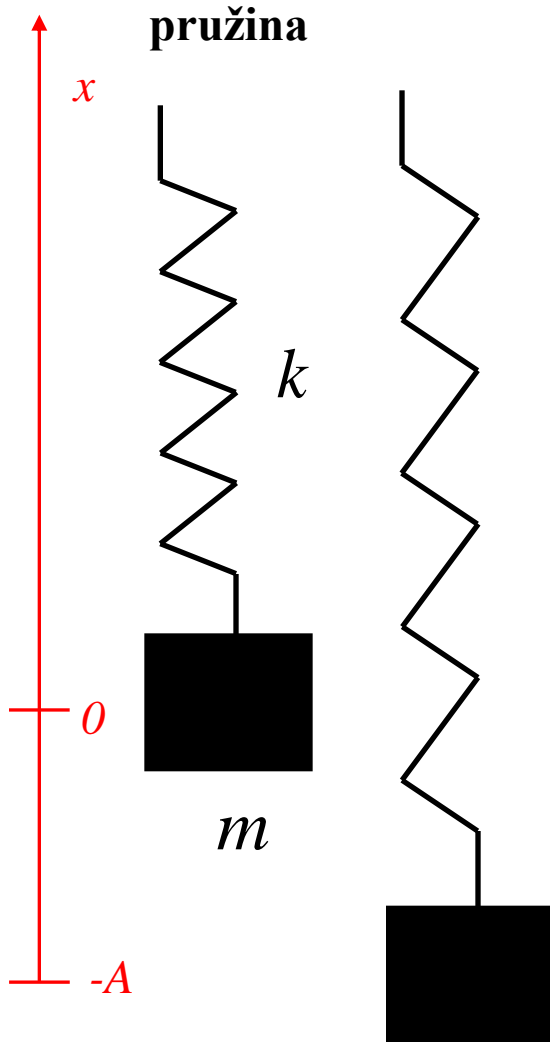
- **valivé tření**  $\mu_V$  – koeficient valivého tření



$$\mu_V \equiv \frac{|\vec{R} \times \vec{F}_t|}{|\vec{F}_N|} = \frac{RF_t \sin \alpha}{F_N}$$

$$F_t = \mu_V \frac{F_N}{R}$$

# Harmonický oscilátor – pružina



$$ma_x = F_x$$

$$F_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

**Řešení:**

$$x(t) = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_2 t$$

$$\dot{x}(t) = C_1 \omega_1 \cos \omega_1 t - C_2 \omega_2 \sin \omega_2 t$$

$$\ddot{x}(t) = -C_1 \omega_1^2 \sin \omega_1 t - C_2 \omega_2^2 \cos \omega_2 t$$

z počátečních podmínek dostáváme:  $C_1 = 0$   $C_2 = -A$

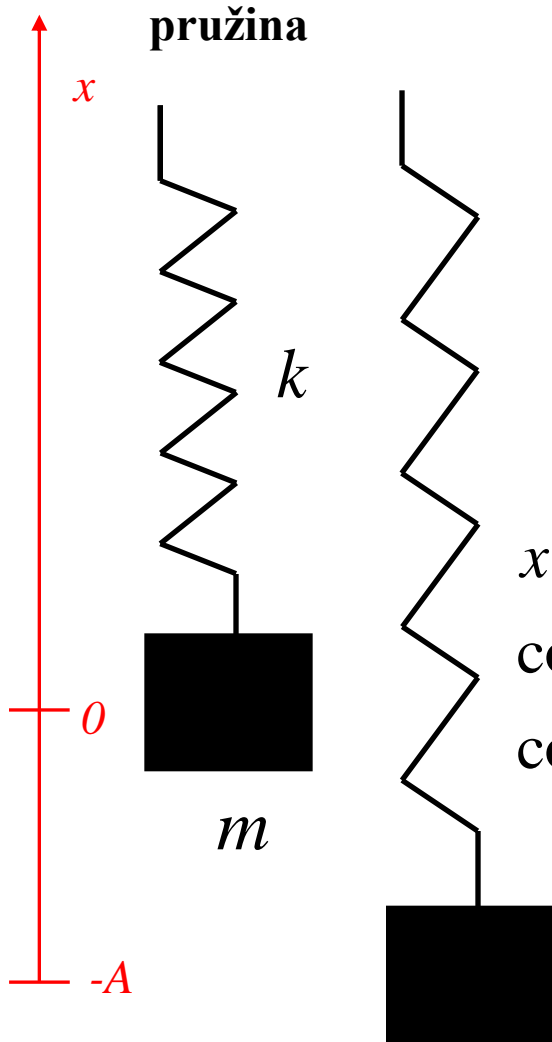
$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \quad \text{pohybová rovnice}$$

$$x(t=0) = -A \quad \text{počáteční podmínky}$$

$$v_x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$$

$$x(t) = -A \cos \omega t \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

# Harmonický oscilátor – pružina



$$ma_x = F_x$$

$$F_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \quad \text{pohybová rovnice}$$

$$x(t=0) = -A \quad \text{počáteční podmínky}$$

$$v_x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$$

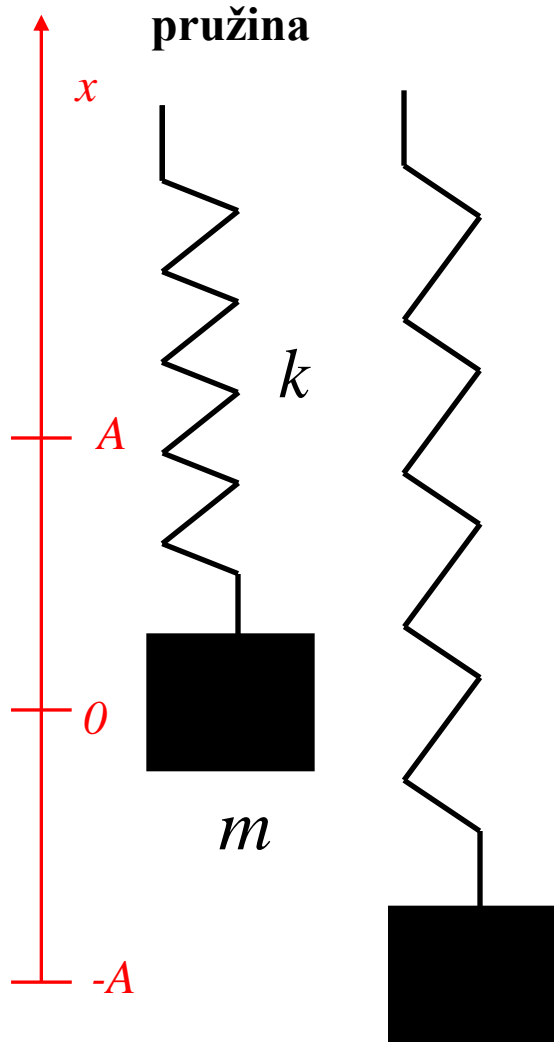
$$x(t) = x(t+T) \quad x(t) = -A \cos \omega t \quad x(t+T) = -A \cos \omega(t+T)$$

$$\cos \omega t = \cos \omega(t+T) = \cos \omega t \cdot \cos \omega T - \sin \omega t \cdot \sin \omega T \Rightarrow$$

$$\cos \omega T = 1, \quad \sin \omega T = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega T = 2\pi$$

$$\text{perioda kmitů: } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

# Harmonický oscilátor – pružina



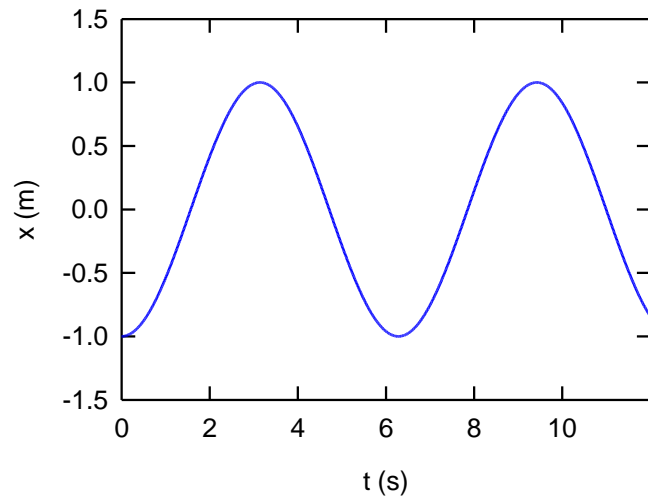
$$x(t) = -A \cos \omega t$$

$$v_x(t) = A \omega \sin \omega t$$

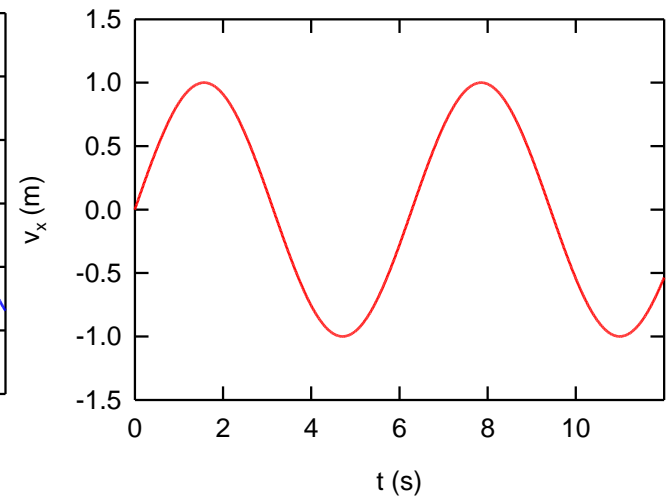
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Př.  $k = 1, m = 1$

poloha



rychlost





# Setrvačná a gravitační hmotnost

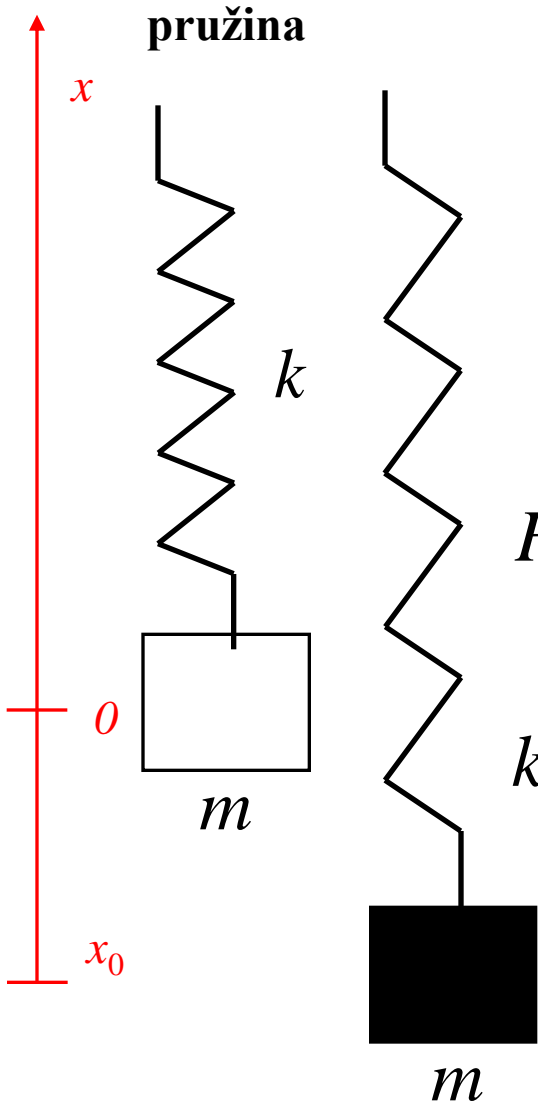
- 2. Newtonův zákon:  $\vec{F} = m_s \vec{a}$   
 $m_s$  – setrvačná hmotnost  
= míra setrvačnosti tělesa
- Gravitační zákon:  $F_g = \kappa \frac{m_g M_g}{r^2}$   
 $m_g$  – gravitační hmotnost  
= míra velikosti gravitační síly

$$\frac{m_s}{m_g} = konst.$$

ekvivalence setrvačné a gravitační hmotnosti

**slabý princip ekvivalence**

# Setrvačná a gravitační hmotnost



$$ma_x = F_x$$

$$F_x = -kx$$

$$x(t) = -A \cos \omega t$$

$$F_g = \kappa \frac{m_g M_Z}{R_Z^2} = m_g g$$

$$kx_0 = \kappa \frac{m_g M_Z}{R_Z^2} = m_g g$$

$$F_x = F_g$$

$m_s$  – setrvačná hmotnost

= míra setrvačnosti tělesa

- změříme z periody kmitání pružiny

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m_s}{k}}$$

$m_g$  – gravitační hmotnost

= míra velikosti gravitační síly

- změříme z natažení pružiny

$$x_0 = \frac{\kappa}{k} \frac{m_g M_Z}{R_Z^2} = \frac{m_g g}{k}$$

# Setrvačná a gravitační hmotnost

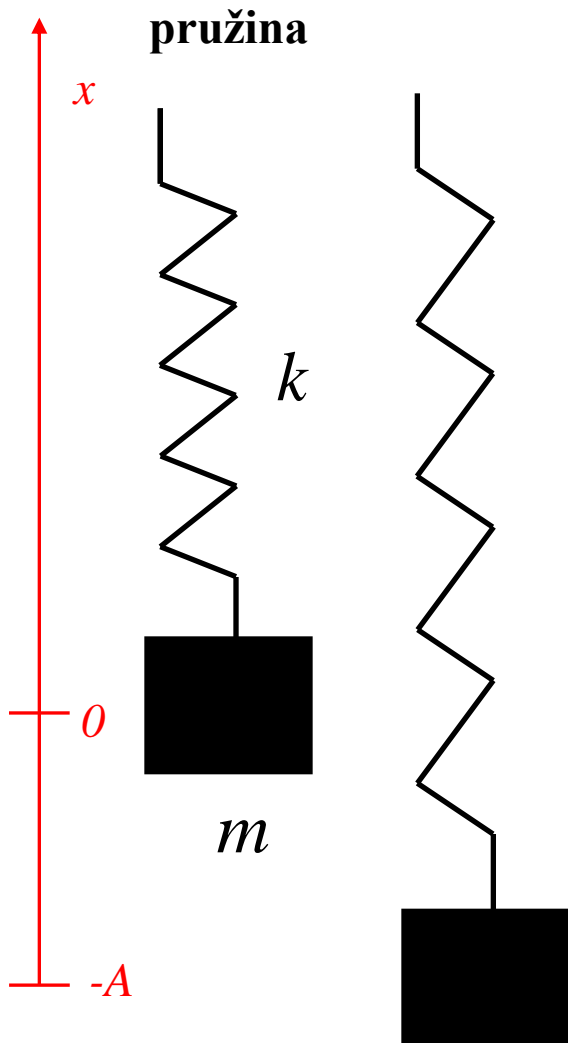
- 2. Newtonův zákon:  $\vec{F} = m_s \vec{a}$   $m_s$  – setrvačná hmotnost  
= míra setrvačnosti tělesa
- Gravitační zákon:  $F_g = \kappa \frac{m_g M_g}{r^2}$   $m_g$  – gravitační hmotnost  
= míra velikosti gravitační síly

$$\frac{m_s}{m_g} = \frac{g}{x_0 \omega^2} = \frac{gT^2}{x_0 4\pi^2}$$

ekvivalence setrvačné a gravitační hmotnosti

**slabý princip ekvivalence**

# Harmonický oscilátor – pružina



$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$F_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \quad \text{pohybová rovnice}$$

obecné řešení:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

úhlová  
frekvence  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

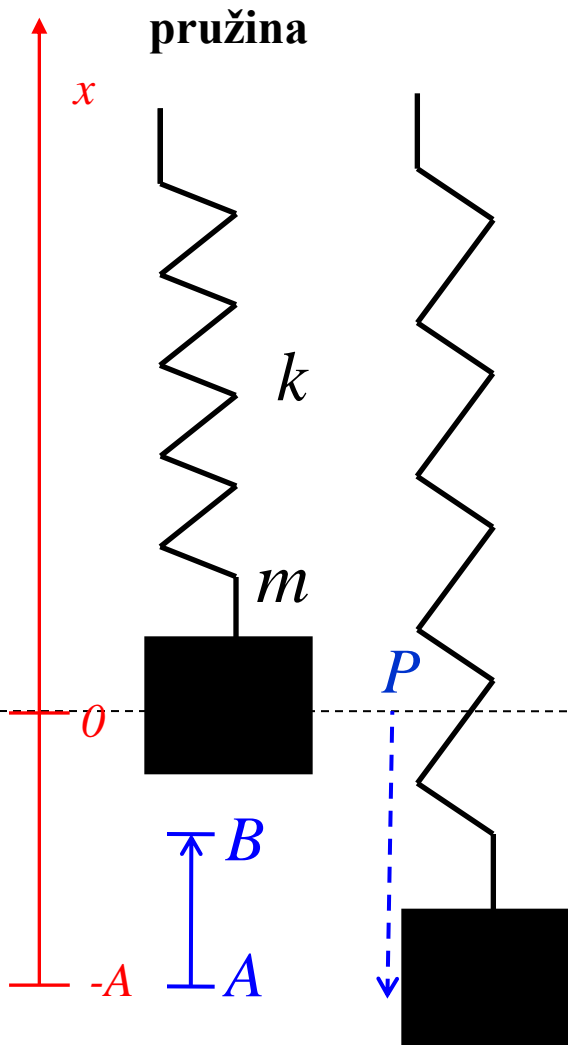
fázový posuv

$$x(t) = A \cos \varphi \sin \omega t + A \sin \varphi \cos \omega t$$

$$C_1 = A \cos \varphi, \quad C_2 = A \sin \varphi$$

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

# Harmonický oscilátor – pružina



práce, kterou vykoná pružina při přesunu závaží z  $A$  do  $B$ :

$$A_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} -kx \, dx = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

$$A_{PA} = \int_{x_P}^{x_A} -kx \, dx = -\frac{1}{2}k(x_A^2 - x_P^2) = -\frac{1}{2}kx_A^2$$

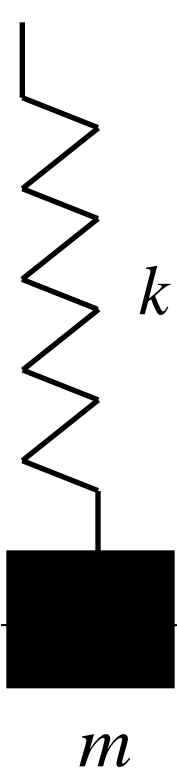
potenciální energie v bodu A:  $E_p(A) = -A_{PA} = \frac{1}{2}kx_A^2$

hladina nulové potenciální energie

potenciální energie pružiny:  $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$

# Harmonický oscilátor – pružina

pružina



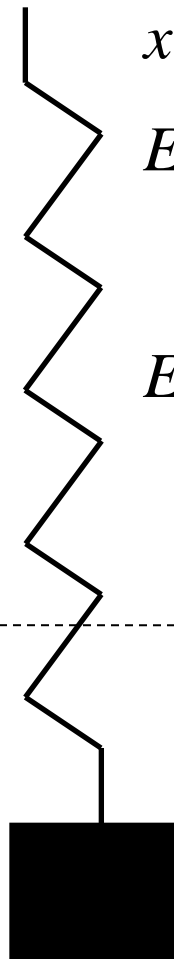
potenciální energie:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad \dot{x}(t) = A \omega \cos(\omega t + \varphi), \quad k = m \omega^2$$
$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

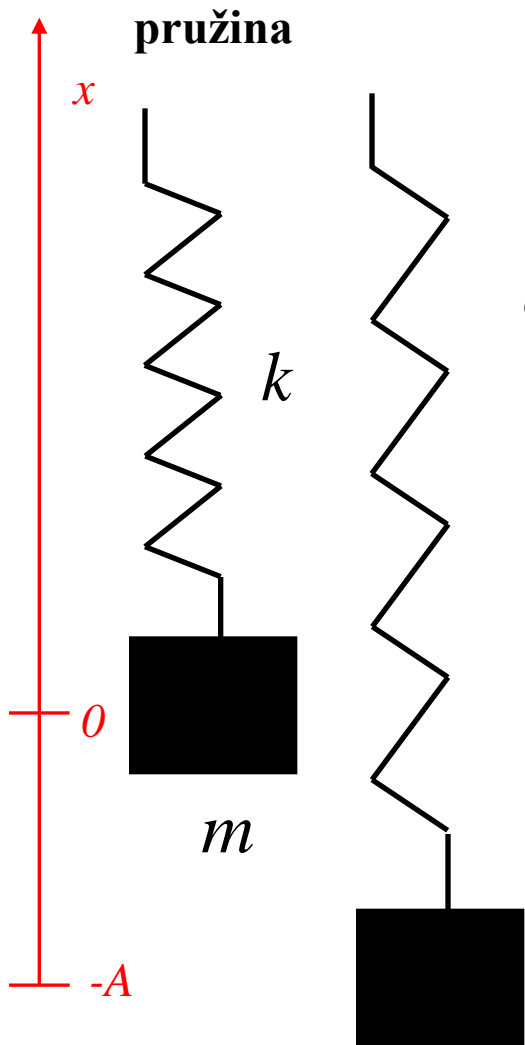
kinetická energie:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

celková energie :  $E_M = E_k + E_p = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$



# Tlumené kmity



Tlumící (odporová) síla:

$$F_x = -h\dot{x}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

řešení hledáme ve tvaru:  $x = Ce^{\alpha t}$

$$C\alpha^2 e^{\alpha t} = -\omega_0^2 Ce^{\alpha t} - 2\delta C\alpha e^{\alpha t}$$

charakteristická rovnice:  $\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$$

Pohybová rovnice:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{h}{m}\dot{x}$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta\dot{x}$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

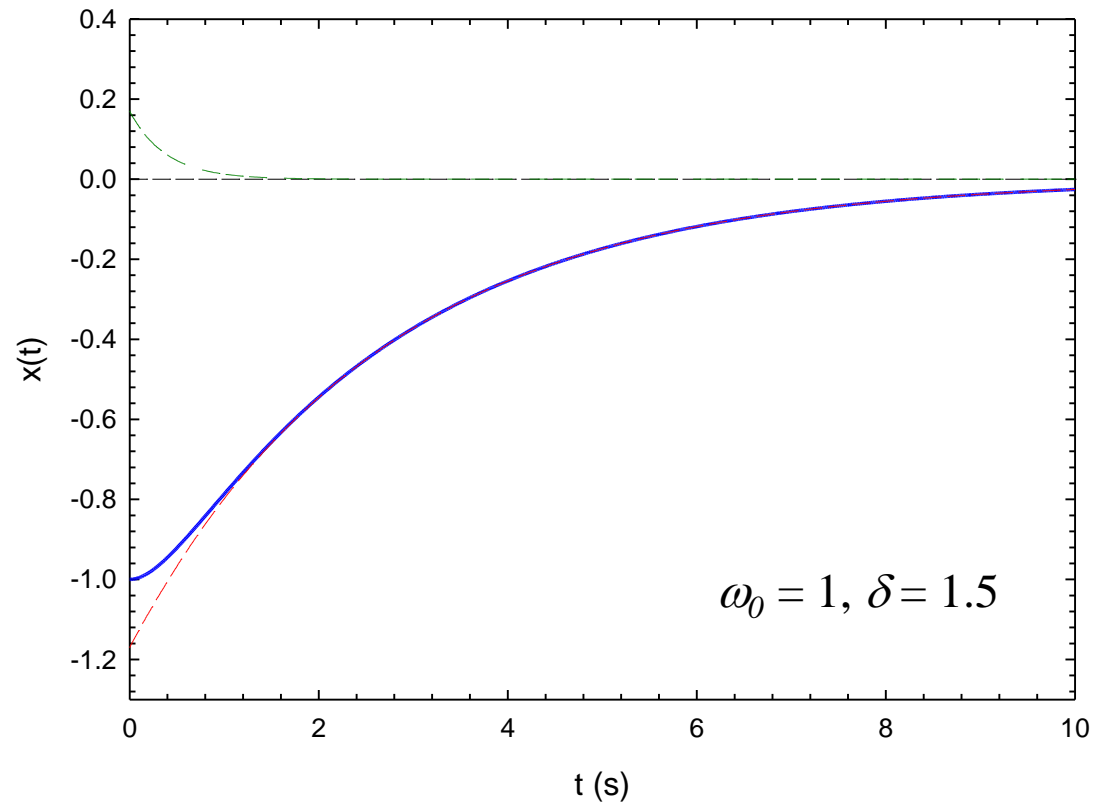
# Tlumené kmity – aperiodický pohyb

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta \dot{x}$$

aperiodický pohyb:  $D > 0 \Rightarrow \delta > \omega_0$

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$



konstanty  $C_1, C_2$  určíme z počátečních podmínek:

$$\text{např. } x(0) = -A \quad C_1 + C_2 = -A$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{A \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$C_2 = \frac{-A \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$x = \frac{A \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} - \frac{A \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t}$$



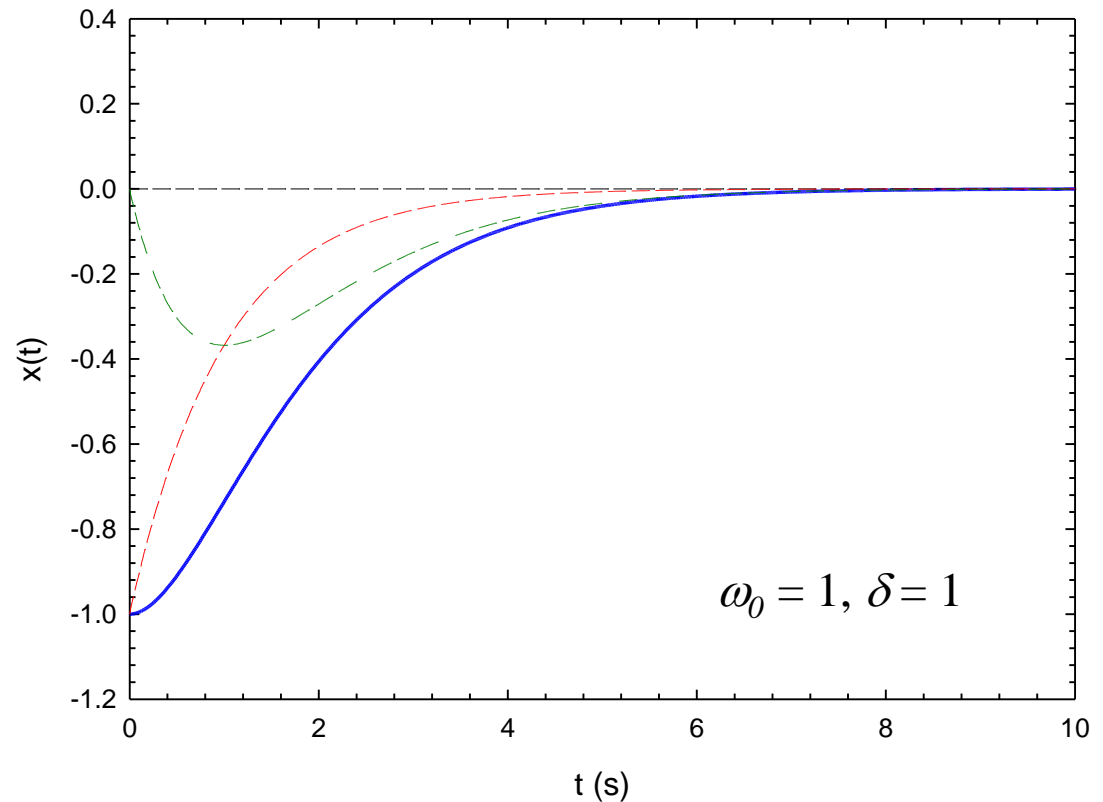
# Tlumené kmity – mezní aperiodický pohyb

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta \dot{x}$$

mezní aperiodický pohyb:  $D = 0$

$$x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t}$$

$$\alpha = -\delta$$



konstanty  $C_1, C_2$  určíme z počátečních podmínek:

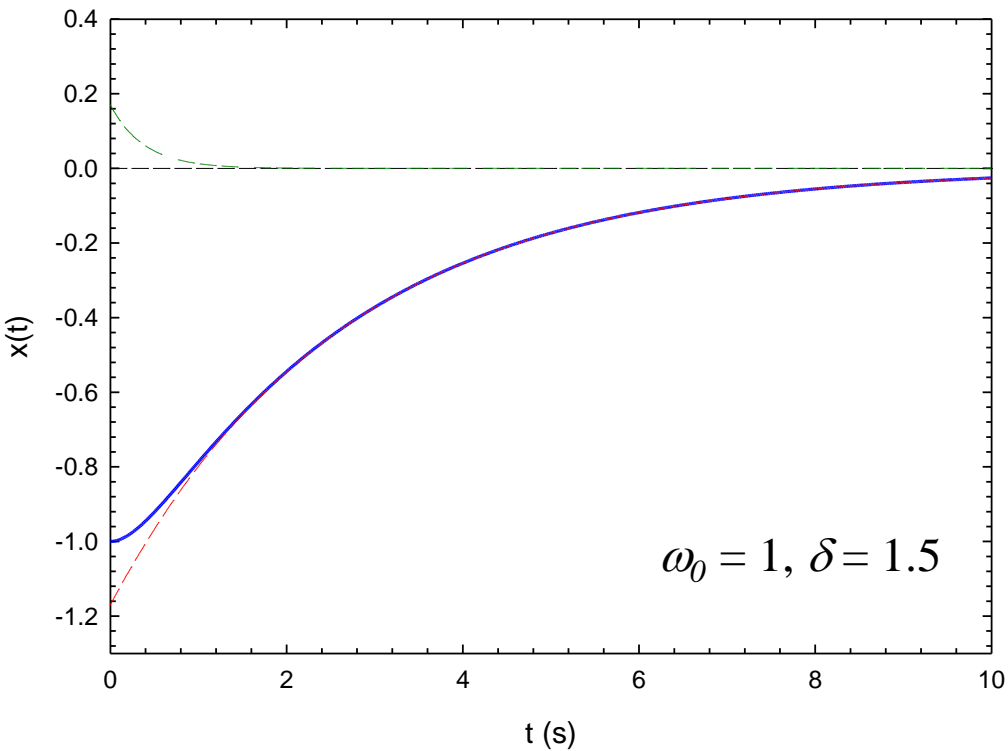
$$\text{např. } x(0) = -A \quad C_1 = -A \quad C_2 = A\alpha$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad C_1\alpha + C_2 = 0$$

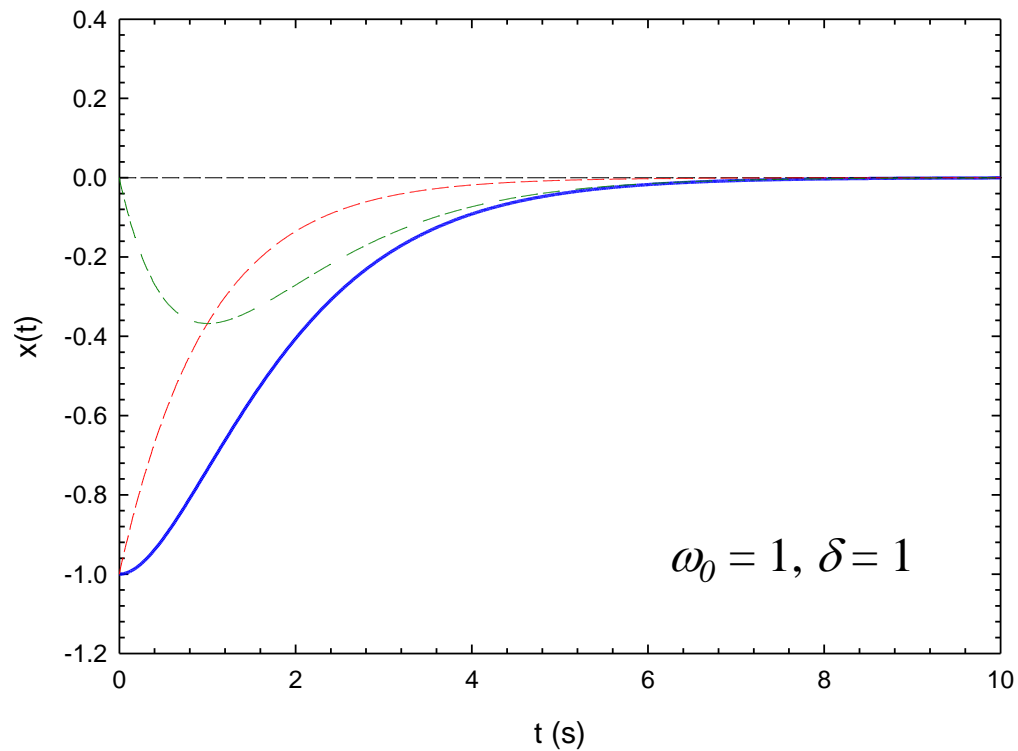
$$x = -Ae^{-\delta t} - A\delta t e^{-\delta t} = -Ae^{-\delta t} (1 + \delta t)$$

# Tlumené kmity

## aperiodický pohyb



## mezní aperiodický pohyb



# Komplexní čísla

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

$$c = x + iy = re^{i\vartheta} = r \cos \vartheta + ir \sin \vartheta$$

$$\operatorname{Re}\{c\} = x = r \cos \vartheta$$

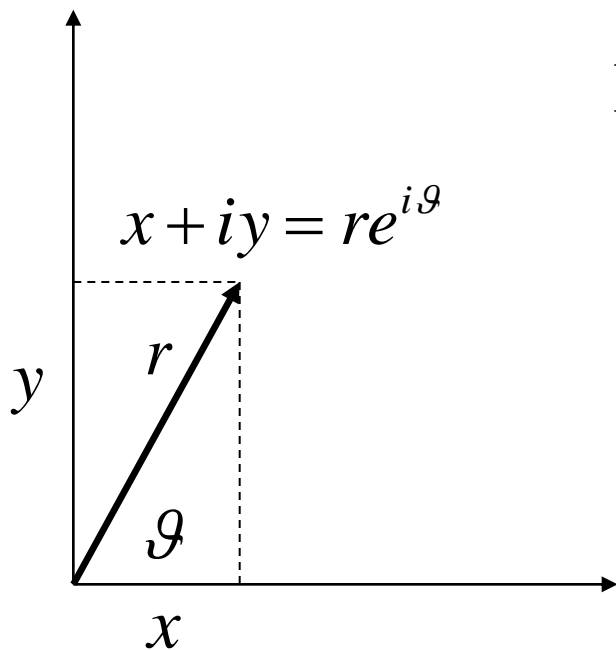
$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\operatorname{Im}\{c\} = y = r \sin \vartheta$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}$$

$$c^* = x - iy = r \cos \vartheta - ir \sin \vartheta$$

$$c \cdot c^* = x^2 + y^2 = r^2$$



# Tlumené kmity – tlumený harmonický pohyb

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta \dot{x} \quad D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$$

tlumený harmonický pohyb:  $D < 0$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}_{\omega} x(t)$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega$$

$$x = C_1 e^{-\delta t} e^{i\omega t} + C_2 e^{-\delta t} e^{-i\omega t}$$

$$x = e^{-\delta t} (C_1 \cos \omega t + iC_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t - iC_2 \sin \omega t)$$

$$x = e^{-\delta t} (D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t)$$

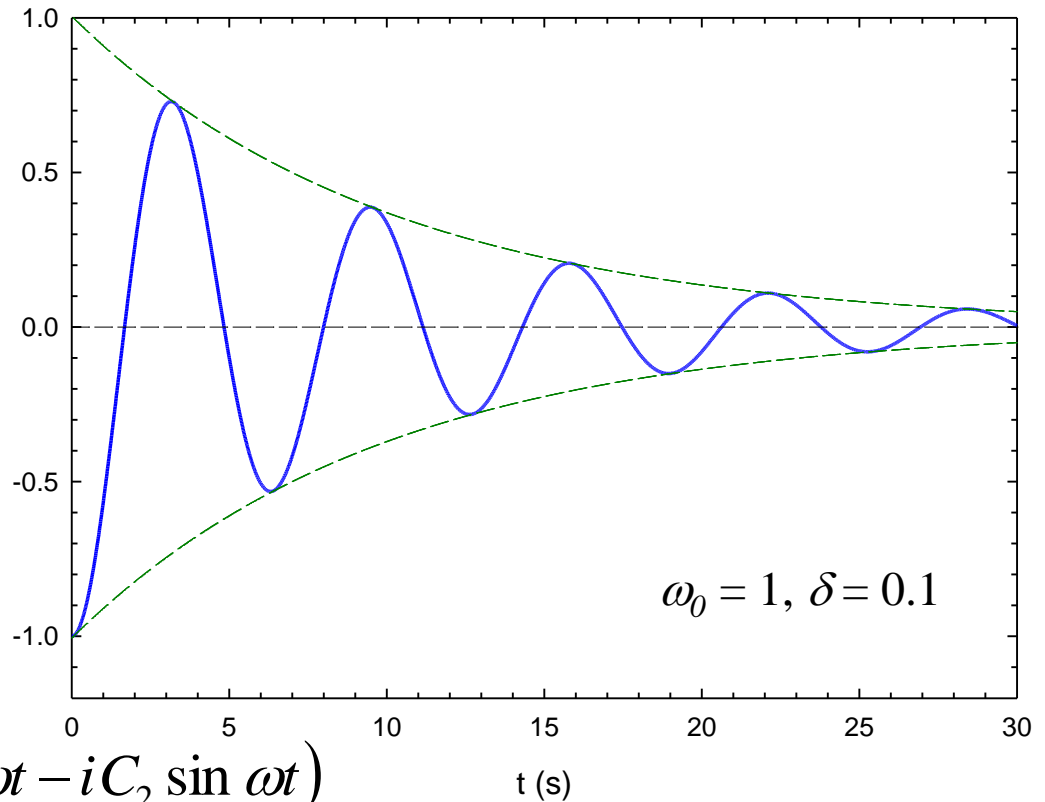
$$\left. \begin{array}{l} D_1 = C_1 + C_2 \\ D_2 = i(C_1 - C_2) \end{array} \right\} C_2 = C_1^*$$

$$x = A_T e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x} = A_T e^{-\delta t} [-\delta \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)]$$

Konstanty  $A$ ,  $\varphi$  určíme z počátečních podmínek např.:

$$x(0) = -A \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \varphi = \arctg \frac{\omega}{\delta} \quad A_T = \frac{-A}{\sin \varphi}$$



# Tlumené kmity – tlumený harmonický pohyb

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta \dot{x} \quad D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$$

tlumený harmonický pohyb:  $D < 0$

$$x = A_T e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

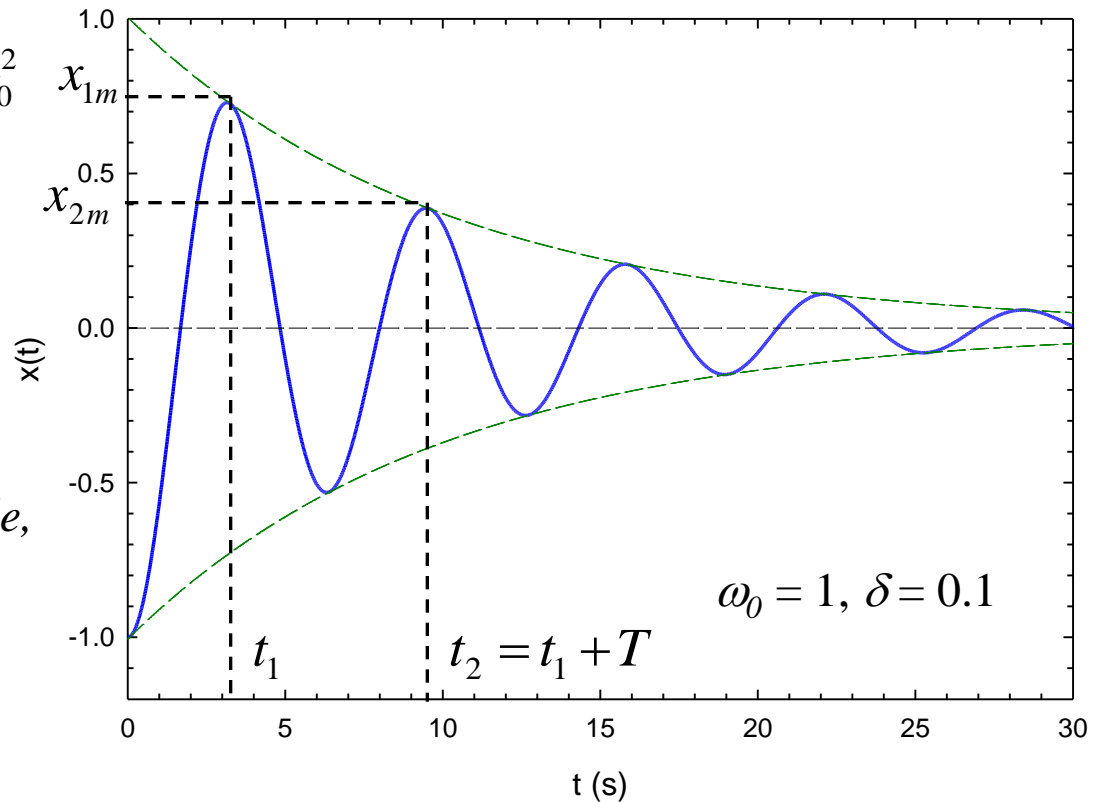
Dobu za kterou obálka kmitu klesne na  $A_T/e$ , nazýváme relaxační dobou :

$$x' = A_T e^{-\delta t}$$

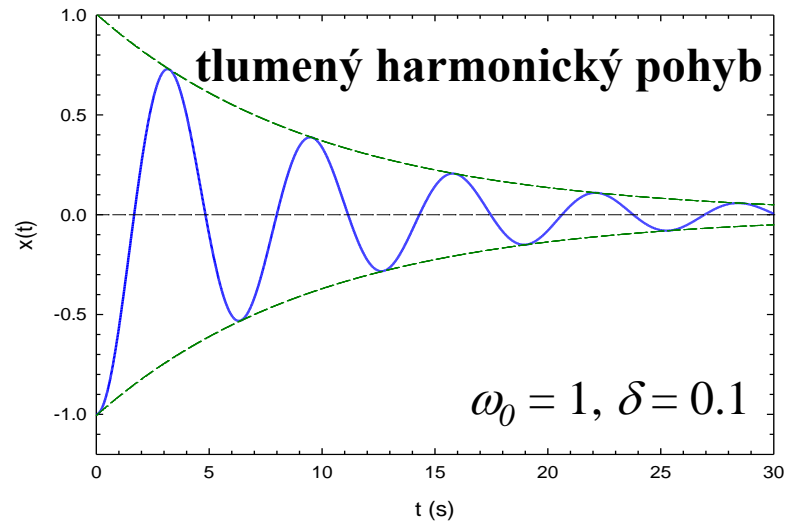
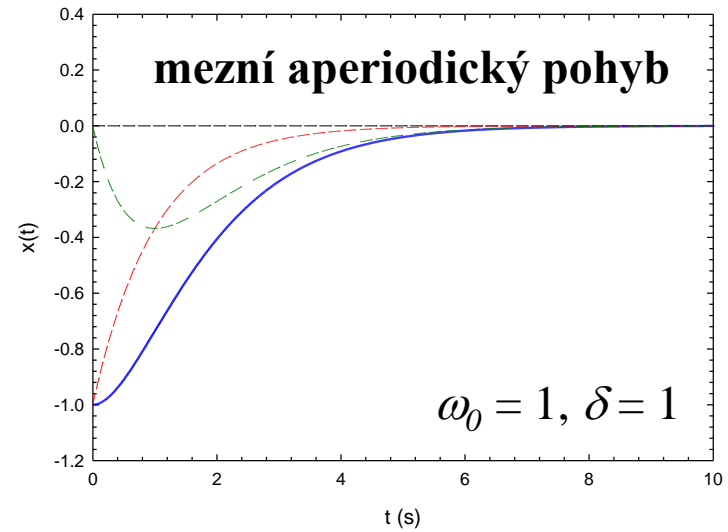
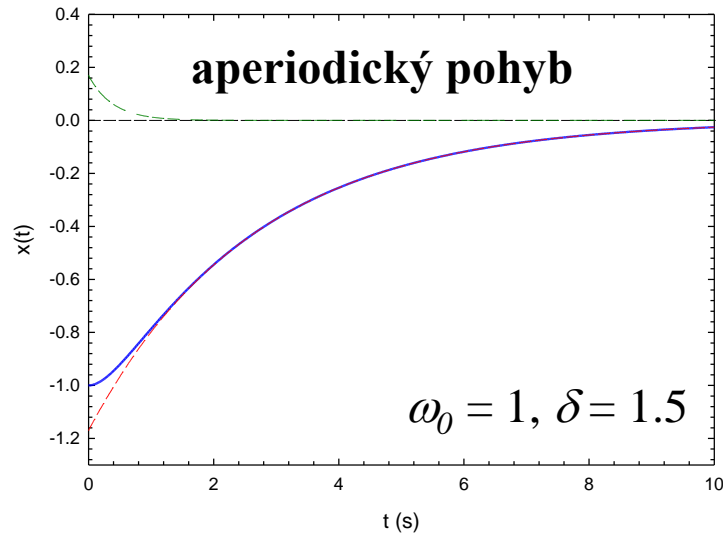
$$A_T / e = A_T e^{-\delta \tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\delta}$$

Poměr dvou po sobě následujících maxim nazýváme útlumem kmitů:

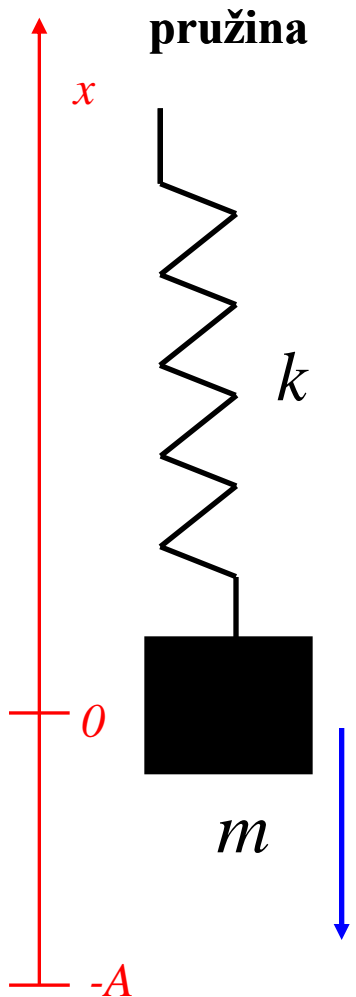
$$\beta = \frac{x_{1m}}{x_{2m}} = \frac{A_T e^{-\delta t_1} \sin(\omega t_1 + \alpha)}{A_T e^{-\delta(t_1+T)} \sin(\omega(t_1+T) + \alpha)} = e^{\delta T}$$



# Opakování - Tlumené kmity



# Nucené kmity



• budící síla:  $F = F_0 \sin(\Omega t)$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t) \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

**pohybová rovnice:**

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

• obecné řešení:  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + x_p$

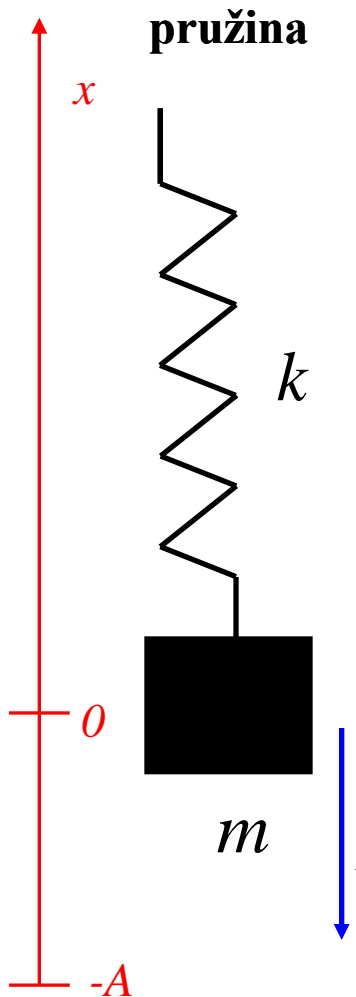
• partikulární řešení:  $x_p = A_p \sin(\Omega t)$  ← partikulární řešení:

$$\left(-A_p \Omega^2 + A_p \omega_0^2\right) \sin(\Omega t) = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t) \Rightarrow A_p \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) = \frac{F_0}{m}$$

$$A_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \quad x_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t)$$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t)$$

# Nucené kmity



• budící síla:  $F = F_0 \sin(\Omega t)$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t) \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

**pohybová rovnice:**

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

• obecné řešení:  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t)$

• počáteční podmínky:  $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$

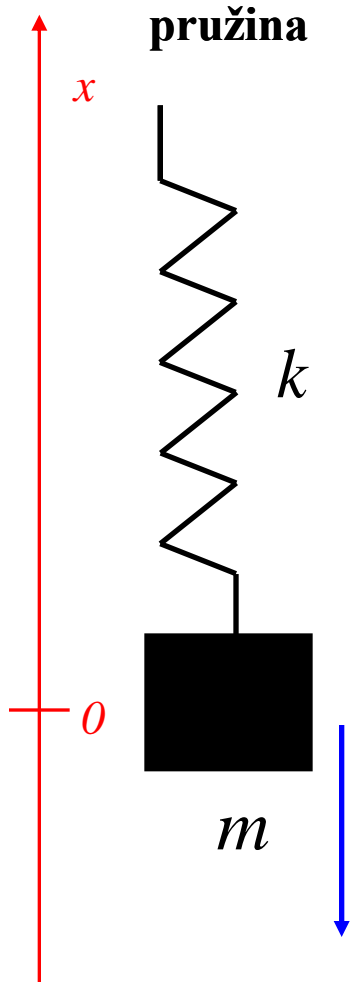
$$0 = A \sin \varphi \Rightarrow \varphi = N\pi$$

$$0 = A \omega_0 \cos \varphi + \frac{F_0 \Omega}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \Rightarrow A = -\frac{\Omega}{\omega_0} \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \frac{1}{\cos N\pi}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \left( \sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right)$$



# Nucené kmity s tlumením



- budící síla:

$$F = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

- obecné řešení:  $x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + x_p$

- partikulární řešení:  $x_p = A_p \sin(\Omega t + \alpha)$  partikulární řešení:

$$(A_p \omega_0^2 - A_p \Omega^2) \sin(\Omega t + \alpha) + 2\delta A_p \Omega \cos(\Omega t + \alpha) = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

$$A_p [(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \alpha - 2\delta \Omega \sin \alpha] \sin(\Omega t) +$$

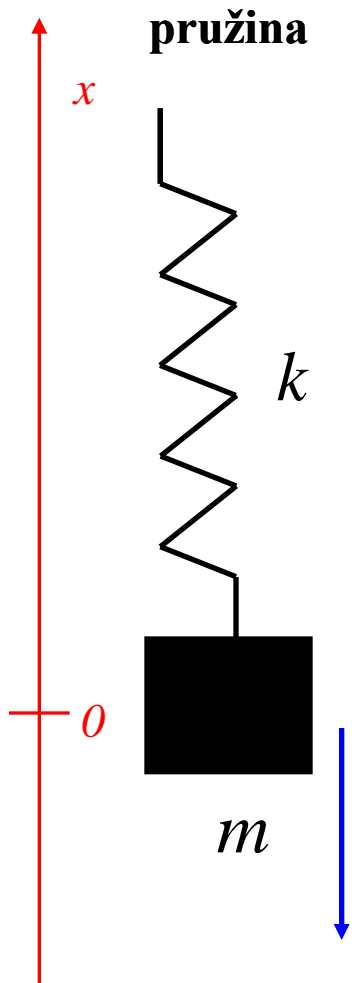
$$+ A_p [(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \alpha + 2\delta \Omega \cos \alpha] \cos(\Omega t) = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

**pohybová rovnice:**

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

# Nucené kmity s tlumením



- budící síla:

$$F = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

$$A_p \left[ (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \alpha - 2\delta\Omega \sin \alpha \right] = \frac{F_0}{m}$$

$$A_p \left[ (\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \alpha + 2\delta\Omega \cos \alpha \right] = 0$$

$$\text{• Pro } A_p \text{ různé od 0: } \quad \text{tg } \alpha = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

- Umocníme a sečteme:

$$A_p = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}$$

- pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

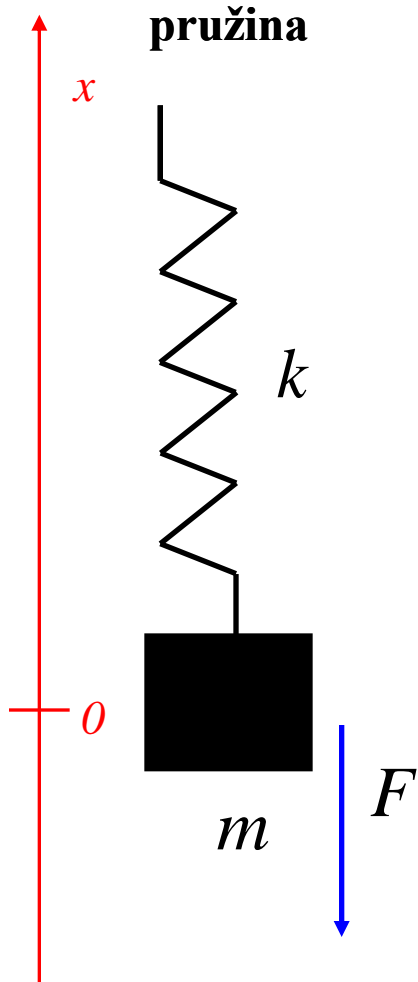
# Nucené kmity s tlumením – řešení v komplexní reprezentaci

harmonický kmit:  $x = A \sin(\omega t + \varphi) \longrightarrow Ae^{i(\omega t + \varphi)}$

amplituda      úhlová frekvence      fázový posuv

$$Ae^{i(\omega t + \varphi)} = A \cos(\omega t + \varphi) + iA \sin(\omega t + \varphi)$$

# Nucené kmity s tlumením – řešení v komplexní reprezentaci



- budící síla:

$$F = F_0 e^{i\Omega t}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

- obecné řešení:  $x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + x_p$

- partikulární řešení:  $x_p = A_p e^{i(\Omega t + \alpha)}$

partikulární řešení:

$$\left( A_p \omega_0^2 - A_p \Omega^2 \right) e^{i(\Omega t + \alpha)} + i 2\delta A_p \Omega e^{i(\Omega t + \alpha)} = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

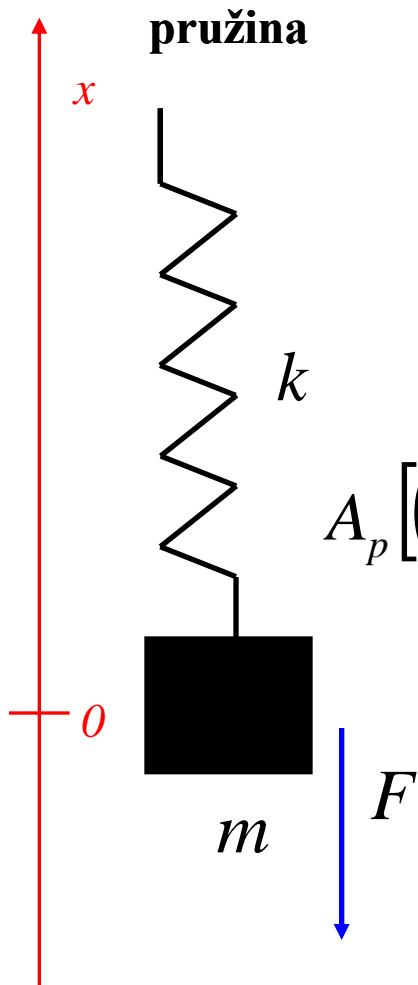
$$A_p \left[ \left( \omega_0^2 - \Omega^2 \right) + i 2\delta \Omega \right] = \frac{F_0}{m} e^{-i\alpha}$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

# Nucené kmity s tlumením – řešení v komplexní reprezentaci



pružina

• budící síla:

$$F = F_0 e^{i\Omega t}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

$$A_p [(\omega_0^2 - \Omega^2) + i2\delta\Omega] = \frac{F_0}{m} e^{-i\alpha} \quad \hat{K} = (\omega_0^2 - \Omega^2) + i2\delta\Omega = Ke^{i\beta}$$

$$K = |\hat{K}| = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}, \quad \text{tg} \beta = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$A_p K e^{i\beta} = \frac{F_0}{m} e^{-i\alpha} \Rightarrow \text{tg} \alpha = -\text{tg} \beta = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$A_p = \frac{F_0}{mK} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}$$